

L'épreuve comporte deux exercices et un problème. Le candidat devra traiter chacun des exercices et le problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.

On considère la transformation r définie par :

à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que :
$$\begin{cases} 2x' = x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ 2y' = x\sqrt{3} + y + 1. \end{cases}$$

- (a) Donner l'écriture complexe de r .
(b) En déduire la nature exacte et les éléments géométriques de r .
- Soit h l'application du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par z' tel que : $z' = -2z + 3i$.
Montrer que h est une homothétie de centre $\Omega(0;1)$.
- On considère $s = h \circ r$
(a) Déterminer la nature et les éléments géométriques de s
(b) Donner l'expression exponentielle de s .

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité sur les axes 1cm.

(H) est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que : $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$.

- (a) Montrer que (H) est une hyperbole.
(b) Déterminer respectivement le centre, les axes, les sommets et les asymptotes de (H)
- Soit Ω le point de coordonnées $(-2;1)$ et $\vec{e}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{e}_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ deux vecteurs du plan.
(a) Montrer que $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère du plan.
(b) Montrer que l'équation cartésienne de (H) dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est $Y = \frac{1}{4X}$
(c) En déduire l'excentricité et les foyers de (H) dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
- Représenter graphiquement (H) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PROBLEME

Le problème comporte trois parties indépendantes A ; B et C, Le candidat se doit de traiter chacune des trois parties

Partie A

L'espace orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1;1;-1,5)$, $B(0;1;-1)$, $C(-4;-3;-2)$ et $D(1;1;-1)$

- (a) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
(b) Ecrire une équation cartésienne du plan (ABC) .
- Montrer que les points A , B , C et D ne sont pas colinéaires.
- Les trois points A , B , C et D définissent un tétraèdre $ABCD$
Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5}u_n, \text{ pour tout entier } n \end{cases}$$

1. On suppose que la suite (u_n) est convergente. Montrer alors que sa limite est $\frac{5}{3}$.
2. On pose $v_n = u_n - \frac{5}{3}$
 - (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme v_0
 - (b) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .
 - (c) Etudier la convergence de la suite (v_n) .
3. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$
 - (a) Exprimer S_n en fonction de v_0 et n .
 - (b) Exprimer S'_n en fonction de v_0 et n .

Partie C

On considère l'équation différentielle $(E): y'' + 4y' + 5y = 0$.

1.
 - (a) Déterminer la solution générale de (E) .
 - (b) Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé passe par le point de coordonnées $(0;1)$ et la tangente en ce point a pour coefficient directeur -2 .
2. Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
par : $f(x) = e^{-2x} \cos x$.
On note C_f la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
 - (a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
 - (b) Donner le signe de f sur son ensemble de définition.
3. Soit F la fonction définie par $F(x) = \frac{1}{5}e^{-2x}(\sin x - 2\cos x)$.
 (Δ) le domaine plan délimité par la courbe C_f , l'axe des ordonnées,
l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$.
 - (a) Montrer que F est une primitive de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
 - (b) En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine (Δ) .